Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (27/9/2019)

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1

i) Εξ' ορισμού σύγκλισης μιας σειράς, αν

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k = \ell \in \mathbb{R}$.

Όμως, $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

Άρα, $\lim_n a_n = \ell - \ell = 0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει

Αντιπαράδειγμα: Η $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

ενώ η $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.

ii) Θέτω $a_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$, $n \geq 2$.

Αρχικά, $a_n \to 0$ οπότε έχει νόημα να μελετηθεί η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ ως προς τη σύγκλιση. Η $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και φθίνουσα.

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Πραγματικά, για $n \in \mathbb{N}$: $n+1 > n \Rightarrow$

$$\log(n+1) > \log n \Rightarrow (\log(n+1))^2 \geq (\log n)^2 \Rightarrow$$

$$(n+1)(\log(n+1))^2 \geq n \cdot (\log n)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^2} \leq \frac{1}{n \cdot (\log n)^2} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} \leq a_n \quad ((a_n) \text{ φθίνουσα})$$

Άρα, από το Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy αρκεί να μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \alpha_{2^n}$ ως προς τη σύγκλιση.

Είναι,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \cancel{2^n} \frac{1}{\cancel{2^n}(\log 2^n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\log 2)^2} = \frac{1}{(\log 2)^2} \overbrace{\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{συγκλίνει}}}^{\text{αρμονική με } p=2>1}$$

Άρα, $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει και αυτό σημαίνει ότι η $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 .$$

Θέτουμε $a_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

Αρχικά, $a_n \to 0$ και επομένως έχει νόημα να εξετάσουμε τη σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ ως προς τη σύγκλιση.

Γενικά, γνωρίζουμε $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Εδώ λοιπόν $\left|\sin\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και άρα $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Όμως, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Άρα, από το κριτήριο σύγκρισης σειρών η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2$ συγκλίνει.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ δυναμοσειρά κέντρου $x_0 = 0$

$a_n := \frac{2^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Ακτίνα σύγκλισης : $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n} \sqrt[n]{a_n}}$

ή αν υπάρχει το $\lim\limits_{n} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

τότε, $R = \lim\limits_{n} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Είναι, $\lim\limits_{n} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n} \dfrac{\cancel{2^n}/n}{2\cdot\cancel{2^n}/n+1}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{n} \left(\dfrac{n+1}{n} \right) = \dfrac{1}{2}$

Άρα, $R = \dfrac{1}{2}$.

Επομένως η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n}$ συγκλίνει

$\forall x \in \mathbb{R}$ τ/ω $|x-0| < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Τι γίνεται στα άκρα του $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$;

- Για $x = -\dfrac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot (-2^{-1})^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$

  η οποία σειρά συγκλίνει από το κριτήριο του Liebnitz

- Για $x = \dfrac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot 2^{-n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$.

Άρα, η εν λόγω δυναμοσειρά συγκλίνει

$\forall\ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και απειρίζεται θετικά

$\forall\ x \geq \frac{1}{2}$ και $x < -\frac{1}{2}$.

Θεμα 2:

i) Θδο $f \cdot g$ ομοιομορφα συνεχής συνάρτηση

Εσω $(x_n), (y_n)$ δύο τυχαίες ακολουθίες

στο A τ/ω $x_n - y_n \xrightarrow{n} 0$ και

Θδο $f \cdot g(x_n) - f \cdot g(y_n) \longrightarrow 0$

ή $|f \cdot g(x_n) - f \cdot g(y_n)| \longrightarrow 0$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$0 \leq |f \cdot g(x_n) - f \cdot g(y_n)| = |f(x_n) g(x_n) - f(y_n) g(y_n)| =$

$= |f(x_n) g(x_n) - f(x_n) g(y_n) + f(x_n) g(y_n) - f(y_n) g(y_n)| =$

$= |f(x_n)(g(x_n) - g(y_n)) + g(y_n)(f(x_n) - f(y_n))| \leq$

$\leq |f(x_n)|\,|g(x_n) - g(y_n)| + |g(y_n)|\,|f(x_n) - f(y_n)|$. (1

Όμως, f, g φραγμένες

Άρα, $\exists M_1, M_2 > 0 : \begin{cases} |f(x)| \leq M_1, & \forall x \in A \\ |g(x)| \leq M_2, & \forall x \in A \end{cases}$

και επίσης f, g ομοιόμορφα συνεχείς

Οπότε, καθώς $x_n - y_n \to 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0 \\ g(x_n) - g(y_n) \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Άρα, στην (1) έχουμε

$$0 \leq |f \cdot g(x_n) - f \cdot g(y_n)|$$

$$\leq M_1 \, |\underbrace{g(x_n) - g(y_n)}_{\to 0}| + M_2 \cdot |\underbrace{f(x_n) - f(y_n)}_{\to 0}| \longrightarrow 0$$

Άρα, από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι $|fg(x_n) - fg(y_n)| \longrightarrow 0$

ii) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$, $x \in (1, 2)$

Φανερά f συνεχής ως γινόμενο συνεχών

στο διάστημα $(1,2)$

Επίσης, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

(βλ. αξιοσημείωτα όρια)

και $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln x}{x-1} = \ln 2$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $(1,2)$.

$g(x) = \sin x + \sqrt{x}$, $x \geq 0$

Η g συνεχής στο $[0,+\infty)$

Αρκεί νδο g ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,+\infty)$, για κάποιο $a>0$.

Αν $a=1$, θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο, ότι η g είναι Lipschitz συνεχής στο $[1,+\infty)$. Ουσιαστικά, θδο η g είναι παραγωγίσιμη με g' φραγμένη

g προφανώς παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$

Τότε, $\forall x \geq 1$: $g'(x) = \cos x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Άρα, $\forall x \geq 1$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq 1\right)$:

$$|g'(x)| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Οπότε, g' φραγμένη στο $[1,+\infty)$, και άρα

g Lipschitz συνεχής στο $[1,+\infty)$

Άρα, g ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 3:

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -\frac{1}{4}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$

ΘΔΟ f όχι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$

δηλ. αρκεί νδο $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx$

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx := \sup\left\{ L(f,P) \,/\, P \text{ διαμ του } [0,1] \right\}$$

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx := \inf\left\{ U(f,P) \,/\, P \text{ διαμερ. του } [0,1] \right\}$$

$$U(f,P) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

$$L(f,P) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

όπου $\quad M_k := \sup\left\{ f(x) \,/\, x \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$

και $\quad m_k := \inf\left\{ f(x) \,/\, x \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$

για διαμέριση $\quad P = \left\{ 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1 \right\}$

Έτσι,

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2} (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \frac{3}{2}\left[(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \dots + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) \right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[x_n - x_0 \right] = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}$$

Οπότε, $\quad \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \frac{3}{2}$

Επίσης,

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \dots + (x_n - \cancel{x_{n-1}})\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[x_n - x_0\right] = -\frac{1}{4}(1-0) = -\frac{1}{4}$$

Άρα, $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = -\frac{1}{4}$

Τουτέστιν, $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \underline{\int_0^1} f(x)\,dx$

ii-iii) Έστω $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα

Οπότε, $\forall x \in [0,1] : f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

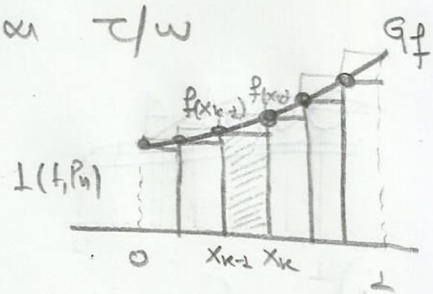
Δηλ. f φραγμένη και έχει νόημα να εξετάσει κανείς αν f ολοκληρώσιμη

- Αν $f(0) = f(1) \Rightarrow f(x) = σταθ \Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη
- Αν $f(0) \neq f(1)$, με εφαρμογή του κριτηρίου Riemann θα βρούμε $\forall \varepsilon > 0$, ένα μεγάλο n ώστε η διαμέριση

$P_n := \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1 \right\}$ του $[0,1]$

σε n-ίσα τμήματα να είναι τ/ω

$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \varepsilon$



Για $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, έχουμε:

$$U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \overset{f \text{ αυξ}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underbrace{\cancel{(x_k - x_{k-1})}}_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\tfrac{1}{n}\right) + \dots + f(1) \right)$$

f αυξ και άρα, θα έχει το supremum στο $[x_{k-1}, x_k]$, στο δεξί άκρο δηλ. στο x_k

και

$$L(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \overset{f \text{ αυξ}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \underbrace{\cancel{(x_k - x_{k-1})}}_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \left(f(0) + \dots + f\left(\tfrac{n-1}{n}\right) \right)$$

f αυξ και άρα θα έχει το infimum στο $[x_{k-1}, x_k]$, στο αριστερό άκρο δηλ. στο x_{k-1}.

Έχουμε, $U(F,P_n) - L(F,P_n) = \dfrac{f(1) - f(0)}{n} \xrightarrow{n} 0$

Οπότε, το κριτήριο του Riemann, δηλώνει ότι f ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

ΘΕΜΑ 4.

i) Εφόσον f', g' ολοκληρώσιμες, τότε η $(f\cdot g)'$ ολοκληρώσιμη, αφού $f'g$ ολοκληρώσιμη και $f\cdot g'$ ολοκληρώσιμη. Από το 2ο θεμ. θεώρημα:

$$\left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \left(f(x)g(x)\right)' dx = \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx$$

ii) $$\int \frac{dx}{(x+2)(x-5)^2} = \int \frac{A}{x+2}dx + \int \frac{B}{x-5}dx + \int \frac{\Gamma}{(x-5)^2}dx$$

Ποια τα A, B, Γ;

$$\frac{1}{(x+2)(x-5)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-5} + \frac{\Gamma}{(x-5)^2}$$

$$1 = A(x-5)^2 + B(x+2)(x-5) + \Gamma(x+2)$$

$$1 = (A+B)x^2 + (-10A-3B+\Gamma)x + (25A-10B+2\Gamma)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-A \quad (1) \\ -10A-3B+\Gamma=0 \\ 25A-10B+2\Gamma=1 \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} -7A+\Gamma=0 \\ 35A+2\Gamma=1 \end{cases} \overset{(5)}{\Rightarrow} \begin{cases} \Gamma=\frac{1}{7} \\ A=\frac{1}{49} \end{cases}$$

Οπότε, στην (1) $B=-\frac{1}{49}$

Έτσι,

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x-5)^2} = \int \frac{1/49}{x+2}dx + \int \frac{-1/49}{x-5}dx + \int \frac{1/7}{(x-5)^2}dx$$

$$= \frac{1}{49}\ln|x+2| - \frac{1}{49}\ln|x-5| - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x-5} + c$$

$$\int_1^2 x^3 \ln x \, dx = \int_1^2 \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x \, dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4}\cdot\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$4\ln 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left[x^4\right]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{1}{16}(2^4-1) =$$

$$\ln 16 - 1 + \frac{1}{16}.$$

$$\cos^2 \square = \frac{1+\cos 2\square}{2}$$

$$\int \cos^4(2x)\,dx =$$

$$\int \left(\cos^2(2x)\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$\frac{1}{4}\left[\int dx + 2\int \cos 4x\,dx + \int \cos^2 4x\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\cdot \sin 4x + \int \frac{1+\cos 8x}{2}\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\cdot \sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\int \cos 8x\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\cdot \sin 8x\right) + c =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + c.$$

iii) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+3}\,dx$. Θέτω $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+3}$, $x \geq 0$

Τότε, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+3} \leq \frac{1}{x^2+3} =: g(x)$

Το $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3}\,dx = \lim_{y\to\infty}\int_0^y \frac{1}{x^2+3}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\cdot\lim_{y\to\infty}\int_0^y \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt3}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt3}\cdot\lim_{y\to\infty}\int_0^{y/\sqrt3} \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt3}\cdot\lim_{y\to\infty}\Big[\arctan t\Big]_0^{y/\sqrt3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt3}\lim_{y\to\infty}\arctan\frac{y}{\sqrt3} = \frac{\pi}{2\sqrt3}$$

Άρα, από το κριτήριο σύγκρισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων αφού

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3}\,dx$ συγκλίνει, τότε

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+3}\,dx$ συγκλίνει.

<u>β' τρόπος</u>: Το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+3}\,dx$ είναι της ίδιας φύσης ως προς τη σύγκλιση με το $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+3}\,dx$

Οπότε, αρκεί να μελετήσουμε το $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+3}\,dx$ ως προς τη σύγκλιση.

Εφόσον,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+3} \leq \frac{1}{x^2} = g(x), \quad \forall x \geq 1$$

και το $\int_1^\infty g(x)\,dx$ συγκλίνει (είναι της μορφής $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ για $p=2>1$)

Τότε, από το κριτήριο σύγκρισης ξανά έχουμε πως το $\int_1^\infty f(x)\,dx$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 5. :

Είναι, $f(x) = \sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$

Το πολυώνυμο Taylor βαθμού n είναι:

$$T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{(γύρω από το 0)}$$

$$f'(x) = 3\cos(3x) \longrightarrow f'(0) = 3$$

$$f''(x) = (-1)\cdot 3^2 \cdot \sin(3x) \longrightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = (-1)\cdot 3^3 \cdot \cos(3x) \longrightarrow f'''(0) = (-1)\, 3^3$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)^2 \cdot 3^4 \cdot \sin(3x) \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = (-1)^2 \cdot 3^5 \cdot \cos(3x) \longrightarrow f^{(5)}(0) = (-1)^2 \cdot 3^5$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot 3^{2n} \cdot \sin(3x) \rightarrow f^{(2n)}(0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \cos(3x) \rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cdot 3^{2n+1}$$

Άρα,

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

$$T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$= \cancelto{0}{f(0)} + \frac{f'(0)}{1!}x + \cancelto{0}{\frac{f''(0)}{2!}} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$$

$$= \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f'''(0)}{3!} x + \dots + \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot 3^{2k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \left(= T_{2n+1, f, 0}(x)\right)$$

Εστω $x \neq 0$:

Χρησιμοποιώντας τη μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_{n,f,0}(x) := R_{2n+1,f,0}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x

Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$|R_{2n+1,f,0}(x)| = \frac{|f^{(2n+2)}(\xi)|}{(2n+2)!} |x|^{2n+2}$$

$$\leq \frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!} |x|^{2n+2}$$

Οπότε, από το κριτήριο του λόγου για την $a_n := \frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot |x|^{2n+2}$, ισχύει

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{\cancel{3^{2n}} \cdot 3^4 \cdot \cancel{|x|^{2n}} |x|^4}{\cancel{(2n+2)!}(2n+3)(2n+4)}}{\frac{\cancel{3^{2n}} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{|x|^{2n}} \cancel{|x|^2}}{\cancel{(2n+2)!}}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{3^2 \cdot |x|^2}{(2n+3)(2n+4)} = 0 < 1$$

Οπότε, η ακολουθία (α_n)

συγκλίνει προς το 0

Άρα, από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών

ακολουθιών $\lim_{n} |R_{2n+1, f, 0}(x)| = 0$

ή $\lim_{n} R_{2n+1, f, 0}(x) = 0$

Συνεπώς, $\sin 3x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ